



ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI  
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO

Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF  
SPACE REPRESENTATION SCIENCES

Projective geometry, Descriptive geometry, Survey Photogrammetry

*Palermo*

*Giuseppe Maria Catalano*

L'ILLUSIONE DI GAUSS  
SULLA CURVATURA INTRINSECA



2011

# L'ILLUSIONE DI GAUSS SULLA CURVATURA INTRINSECA

GIUSEPPE MARIA CATALANO

Palermo, 2011

La teoria delle dimensioni dello spazio si fonda sul concetto di curvatura. Questo concetto, apparentemente semplice e intuitivo, nasconde in realtà una natura profonda assai complessa e difficilmente intuibile, che investe la materia e l'energia e permette di andare ancora oltre le nostre attuali conoscenze, come si evince dallo sviluppo della teoria stessa.

Anche la fisica con la teoria della relatività ristretta e generale ha sconvolto, come è noto, molti decenni prima della teoria delle dimensioni (1), la concezione dello spazio, cui eravamo abituati, trasformandolo da contenitore a contenuto inscindibile dal tempo, come le facce di una stessa moneta.

Se nella relatività ristretta si ha la geometria euclidea in uno spazio-tempo piano, nella relatività generale la geometria dello spazio è non euclidea in uno spazio-tempo curvo (2).

Nelle geometrie non euclidee, l'iperbolica e l'ellittica, le rette non sono più le rette euclidee. Ad esse si sostituiscono le geodetiche, che non sono affatto rette, ma curve, aperte nella prima, chiuse nella seconda.

Karl Friedrich Gauss tratta per primo di curvatura intrinseca e le sue affermazioni sembrano a prima vista negare quanto affermato dalla teoria delle dimensioni.

In realtà le due teorie non sono in opposizione ed è importante chiarire perché.

## **La curvatura intrinseca di Gauss**

Le ricerche di Gauss si avviano nel 1818, quando lo scienziato accetta l'incarico di dirigere una rilevazione topografica del regno di Hannover.

Gauss si rende conto che la forma della Terra incide in maniera non trascurabile sulle misure effettuate nella triangolazione (Fig. 2).

Non va bene né la geometria euclidea né quella sferica, poiché il pianeta ha una forma quasi ellissoidale, i cui assi sono stati calcolati da Newton grazie

alle sue leggi sulla gravitazione. Rimane la necessità di tener conto della forma della Terra per raccordare correttamente gli elementi della triangolazione.

Lo scienziato si chiede allora se è possibile calcolare la forma del pianeta dalle stesse misure eseguite in superficie, senza cioè riferirsi ad osservazioni astronomiche.

E' a questo punto che Gauss, avendo trattato in profondità la natura del problema, introduce il concetto di curvatura intrinseca, di curvatura cioè non dipendente dallo spazio circostante, caratteristica intrinseca dunque alla superficie stessa.

Una superficie, come per esempio quella della Terra, può essere pensata immersa in uno spazio tridimensionale e studiata con i classici metodi della geometria analitica cartesiana, utilizzando tre coordinate  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ma in realtà sono sufficienti due coordinate (longitudine e latitudine) per la superficie terrestre.

Quindi, se la superficie anziché ad un sistema di coordinate cartesiane  $x$ ,  $y$ ,  $z$  si riferisce a coordinate curvilinee  $u$  e  $v$ , si può stabilire se la superficie è curva o piana restando sulla superficie stessa, senza fare riferimento a un ipotetico spazio ambiente in cui è immersa.

Essendo una caratteristica indipendente dallo spazio in cui la superficie è immersa, la curvatura della Terra può essere calcolata stando sulla superficie stessa, eseguendo dunque misure in superficie, senza ricorrere a osservazioni astronomiche.

Come è noto Gauss dimostra che la curvatura  $K$  di una superficie in un dato punto  $P$  della stessa si può ottenere dal prodotto delle due curvaturei principali, quella minima e quella massima, i cui piani, normali alla superficie in  $P$ , per un teorema dovuto ad Eulero sono perpendicolari fra loro.

$$K=1/R_1 \times R_2$$

Questa proprietà ci permette, come sappiamo, di calcolare con facilità la curvatura di alcune superfici e di classificare queste in base a tale curvatura, che può essere positiva o negativa, a seconda che le curve principali siano dalla stessa banda o da bande opposte rispetto al piano tangente osculatore in  $P$ . Naturalmente se una o entrambe le curvaturei principali sono nulle anche la superficie ha curvatura nulla in  $P$ .

Gauss mise in evidenza alcuni modi di valutare sperimentalmente il valore negativo, positivo o nullo della curvatura, mediante il tracciamento di alcune geodetiche.

Un primo metodo consiste nel tracciamento di un quadrato

. Se il punto di arrivo e di partenza non coincidono la superficie non è piana. In particolare se i due lati appartenenti a tali due punti si sovrappongono la superficie ha curvatura positiva, viceversa la curvatura è negativa.

Un secondo, più noto, è quello di tracciare una circonferenza di raggio  $r$ . Se la circonferenza è minore di  $2\pi r$  la curvatura è positiva, viceversa è negativa.

Infine se il triangolo racchiuso da tre geodetiche ha per somma degli angoli interni un angolo maggiore dell'angolo piatto siamo di fronte ad una curvatura positiva, viceversa negativa.



Fig. 1. Karl Friedrich Gauss

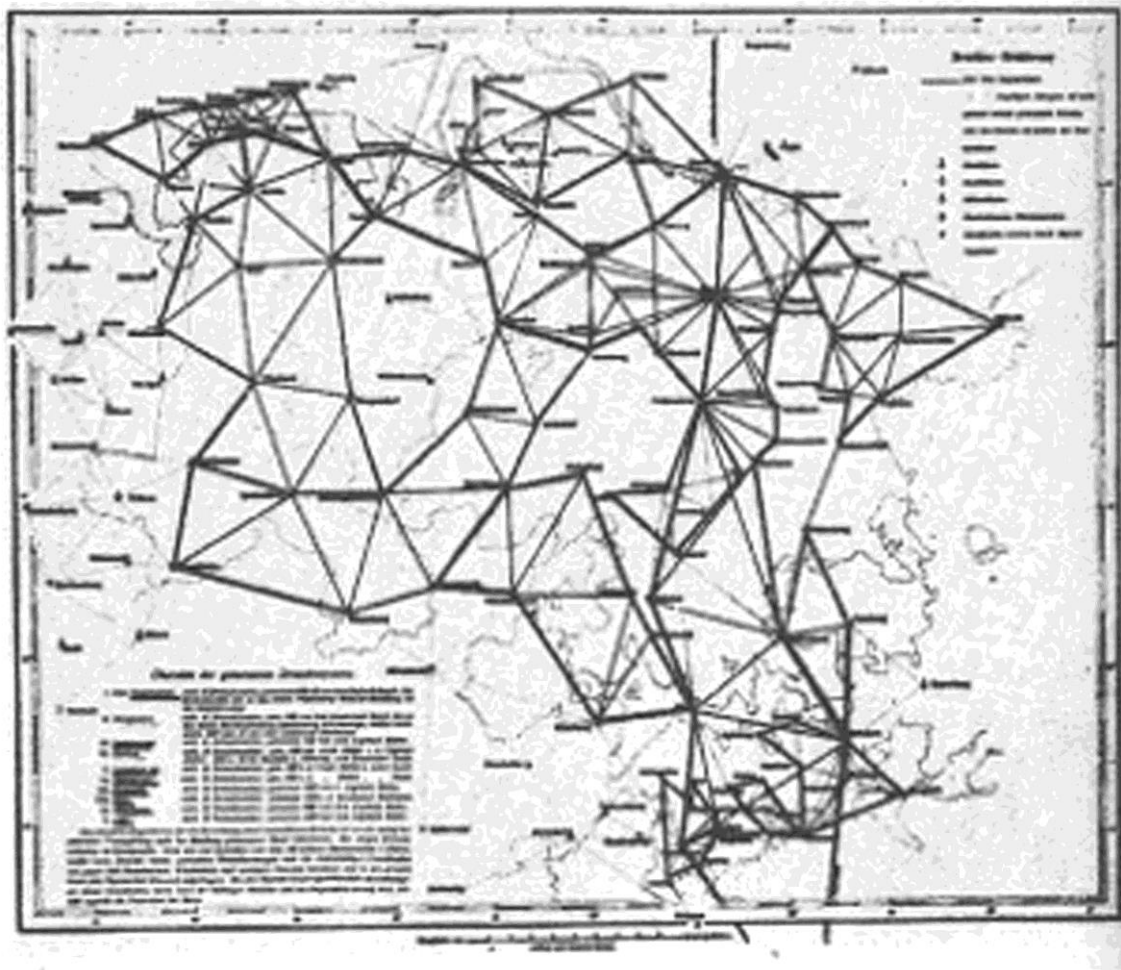


Fig. 2. Triangolazione topografica del regno di Hannover

Che la curvatura potesse nascondere ancora tanto era sicuramente convinzione del grande matematico, considerando le parole che egli scrisse nella relazione alla Società reale di Gottinga l'8 ottobre del 1827: " Benché gli studiosi di geometria abbiano rivolto molta attenzione alle proprietà generali delle superfici curve ed i risultati costituiscano una porzione significativa della geometria superiore, tuttavia questo soggetto è ancora ben lontano dall'essere esaurito e si può ben dire che finora è stata coltivata solo una piccola parte di questo campo immensamente ricco".

### Le tre sorelle

Tutto ebbe inizio quando fu messo in discussione il più celebre postulato di Euclide, il quinto, che nella antica versione afferma che *data una qualsiasi retta ed un punto non appartenente ad essa, per tale punto è possibile tracciare una sola retta parallela alla prima.*

Ventuno secoli dopo Euclide (33 a. C. ) alcuni matematici si chiesero se il parallelismo fosse legato esclusivamente al quinto postulato o fosse indipendentemente derivabile da tutti gli altri postulati della teoria euclidea.

Oltre a Gauss, Janos Bolyai, Nikolaj Lobacevskij, Bernhard Riemann affrontarono il problema e verificarono, per vie diverse, l'esistenza di due geometrie, definite l'iperbolica e l'ellittica, che soddisfano tutti i postulati della geometria di Euclide ad eccezione di quello sulle rette parallele.

Nella prima, l'iperbolica, al piano euclideo, a curvatura nulla, si sostituisce la superficie a curvatura negativa (fig. 3).

*Data una qualsiasi retta ed un punto non appartenente ad essa, per tale punto è possibile tracciare più di una retta, una geodetica, parallela alla prima.*

In tal caso la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di  $180^\circ$ .

Nella seconda, l'ellittica, al piano euclideo si sostituisce la superficie a curvatura positiva (fig. 3).

*Data una qualsiasi retta ed un punto non appartenente ad essa, per tale punto non è possibile tracciare alcuna retta, geodetica, parallela alla prima.*

In questo caso la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di  $180^\circ$ .

E' utile ricordare il teorema egregium di Gauss, secondo cui una superficie può essere sovrapposta ad un'altra solo se le due superfici hanno la stessa curvatura. Quindi l'isometria è possibile solo se la superficie ha in tutti i punti la stessa curvatura, ossia la curvatura della superficie è costante, nulla, positiva o negativa che sia.

Naturalmente anche il concetto stesso di misura si fonda sulla possibilità di trasportare l'unità di misura da un luogo a un altro senza che essa si deformi.

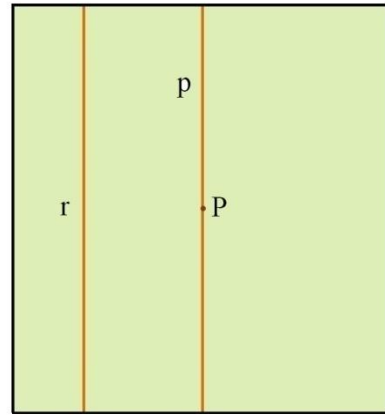
## **La curvatura nella relatività generale**

E' interessante riportare una frase tratta da una lettera di Gauss del 1824 che sembra provare l'intuizione che lo scienziato già possedeva sull'esistenza di uno spazio curvo. "In verità già in passato espressi varie volte la speranza che la geometria euclidea non fosse corretta" (4).

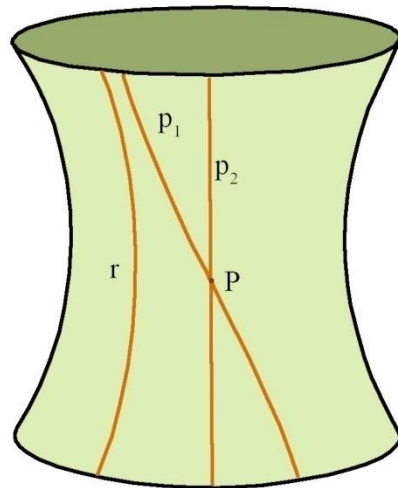
L'intuizione di un nuovo più avanzato concetto di spazio sembra rafforzarsi nel suo allievo Riemann che nel 1854 affermava che le verità riguardanti lo spazio vanno cercate, non nello studio dei libri di Euclide, ma nell'esperienza fisica. Lo spazio, sosteneva, ritenuto omogeneo e continuo alla distanza dell'osservazione quotidiana, potrebbe apparire estremamente irregolare se osservato da breve distanza e a grandissima distanza la curvatura dello spazio potrebbe perfino svelare la curvatura dell'universo in un sistema chiuso, simile ad una palla gigantesca.

Ma i fisici a quel tempo, come avrebbe detto tanti anni dopo A. Einstein, erano ancora assai lontani da un tale modo di pensare. "Per loro lo spazio era qualcosa di rigido e omogeneo, non suscettibile di alterazioni né di limitazioni. Alla metà del secolo scorso solo il genio solitario e incompreso di Riemann si era aperto la strada verso un nuovo concetto di spazio, in cui esso perdeva la propria rigidità e che riconosceva la possibilità della sua partecipazione agli eventi fisici".

Nella geometria piana, euclidea  
data una qualsiasi retta  $r$  ed un punto  $P$   
non appartenente ad essa, per tale punto  
è possibile tracciare una sola retta  $p$   
parallela alla prima.



Nella geometria iperbolica  
data una qualsiasi retta  $r$  ed un punto  $P$   
non appartenente ad essa, per tale punto  
è possibile tracciare più di una retta  $p$ ,  
una geodetica, parallela alla prima.



Nella geometria ellittica  
data una qualsiasi retta  $r$  ed un punto  $P$   
non appartenente ad essa, per tale punto  
non è possibile tracciare alcuna retta  $p$ ,  
una geodetica, parallela alla prima.

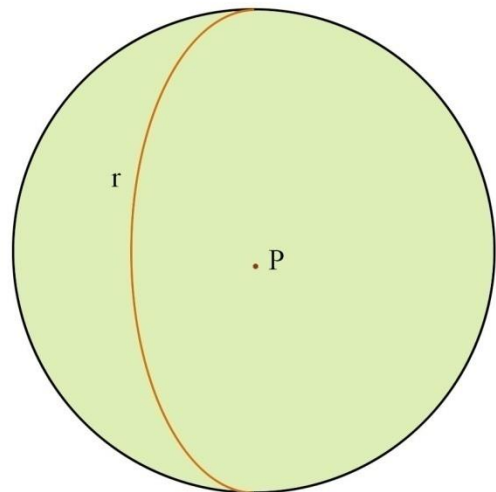


Fig. 3. Il parallelismo al mutare della curvatura

Nella teoria della relatività generale la presenza di massa determina, come sappiamo, un incurvamento dello spazio-tempo. La gravità non è una forza, come tutte le altre, ma è la proprietà della materia di deformare lo spazio-tempo.

Il Sole rivelerebbe un raggio di ben 500 metri inferiore, perché lo spazio all'interno della massa subisce una contrazione per nulla irrilevante.

All'esterno di una massa invece lo spazio, dovendo compensare la contrazione interna, si dilata nella direzione dei diametri. Precisamente una formazione di masse di prova disposte su una sfera assumono una distribuzione ellissoidale con l'asse maggiore dell'ellissoide rotondo appartenente ad una retta per il centro della massa.

A ciò son dovute le maree sulla Terra per effetto della Luna che se il nostro pianeta fosse interamente ricoperto dagli oceani, renderebbe ellissoidale la superficie di questi.

Essendo dunque lo spazio non omogeneo, non si può rappresentarlo, secondo la relatività generale, con una sola delle tre note geometrie. Ne l'euclidea, ne l'ellittica o l'iperbolica esauriscono la complessa mutevole struttura dello spazio-tempo.

La teoria della relatività generale mostra già con l'affermazione della disomogeneità dello spazio quanto sia più complesso il concetto di curvatura rispetto a quello gaussiano.

Nello spazio omogeneo una circonferenza ha curvatura costante. Nello spazio non omogeneo quella che riterremmo una circonferenza in realtà non lo è, perché percorrendola muterebbe lo spazio, la metrica e quindi la curvatura.

## **La curvatura nella teoria delle dimensioni dello spazio**

Il concetto di curvatura nato nello spazio omogeneo euclideo in opposizione al concetto di retta, sviluppatosi poi, con l'estensione alle geodetiche dell'apparato euclideo fondato sulla retta, nelle geometrie non euclidee, si amplia ulteriormente, complicandosi, nella disomogeneità dello spazio-tempo della relatività generale, ma trova un nuovo seppur assai complesso ordine nella teoria delle dimensioni dello spazio.

In questa teoria, che al contrario della relatività generale, nasce da osservazioni puramente geometriche, la struttura dimensionale dello spazio viene rivista alla luce del principio di continuità dello spazio, approfondendo anche il ruolo fondamentale e inscindibile dell'osservatore.

Dal principio di continuità deriva il teorema sulla curvatura dello spazio secondo cui lo spazio non è rappresentabile con rette e piani, ma con circonferenze e sfere (3).

La teoria mostra che per comprendere come si configura lo spazio nella realtà conosciuta, è necessario scomporre e ricomporre le varie dimensioni, pur badando che le dimensioni non sono separabili, ma aspetti dello stesso essere.

Si consideri una linea  $L$  avente la curvatura  $cL$  e un osservatore  $O_1$  ad essa interamente appartenente.

Per l'osservatore l'ente  $L$  ha la dimensione 1, perché egli, appartenendo ad  $L$ , non ha cognizione della curvatura  $cL$  nella dimensione 2.

L'osservatore  $O_2$  esterno ad  $L$ , esteso anche nella dimensione 2, ha cognizione della curvatura  $cL$ .



Ancora

si consideri una superficie  $S$  avente la curvatura  $cS$  e un osservatore  $O_2$  ad essa interamente appartenente.

Per tale osservatore l'ente  $S$  ha le dimensioni 1 e 2, perché egli, appartenendo ad  $S$ , non ha cognizione della curvatura  $cS$  nella dimensione 3.

L'osservatore  $O_3$  esterno ad  $S$ , esteso anche nella dimensione 3, ha cognizione della curvatura  $cS$ .

In generale

si consideri uno spazio  $N$  avente la curvatura  $cN$  e un osservatore ad essa interamente appartenente.

Per l'osservatore l'ente  $N$  ha le dimensioni 1 e 2 ...  $n$  perché egli, appartenendo ad  $N$ , non ha cognizione della curvatura  $cN$  nella dimensione  $n+1$ .

L'osservatore esterno a  $N$ , esteso anche nella dimensione  $n+1$ , ha cognizione della curvatura  $cN$ .

In generale ad ogni nuova dimensione corrisponde una nuova curvatura dello spazio.

L'esistenza della quarta dimensione consiste nella curvatura dello spazio tridimensionale indicata dal teorema sulla curvatura dello spazio.

Curvare lo spazio tridimensionale significa infatti ingrandire o rimpicciolire le circonferenze e le sfere che conformano la sua realtà materiale. La nostra tridimensionalità è uno degli infiniti stadi della quadridimensionalità. Al concetto di curvatura si associa il concetto di densità dello spazio.

La curvatura è l'effetto della variazione di densità dello spazio. Curvare lo spazio nella dimensione  $n+1$  equivale a variare la densità dello spazio a  $n$  dimensioni.

Un ente si estende in quarta dimensione, esso assume infinite grandezze tridimensionali, e le sue caratteristiche sono invarianti rispetto alla posizione di un osservatore tridimensionale, perché questi non è in grado di valutare alcuna variazione nella quarta dimensione. Da ciò consegue che, rispetto all'ente uomo, quale osservatore tridimensionale, l'ente appartenente alla quarta dimensione non ha natura corpuscolare, non ha massa ed ha caratteristiche invarianti.

La luce, e in genere l'energia trasmessa dalle onde elettromagnetiche, è priva di massa e ha caratteristiche invarianti rispetto all'ente uomo, quale osservatore tridimensionale. Se ne deduce che rispetto all'uomo, quale osservatore tridimensionale, l'energia, si estende in quarta dimensione.

## **L'illusione di Gauss**

Nella teoria delle dimensioni dello spazio si afferma che per l'osservatore interamente appartenente alla linea  $L$ , questa ha la dimensione 1, perché egli, appartenendo ad essa, non ha cognizione della curvatura nella dimensione 2.

Analogamente se si consideri una superficie  $S$  avente la curvatura  $cS$  e un osservatore  $O_2$  ad essa interamente appartenente, per tale osservatore l'ente  $S$  ha le dimensioni 1 e 2, perché egli, appartenendo ad  $S$ , non ha cognizione della curvatura  $cS$  nella dimensione 3.

Questa affermazione, estremamente importante per la teoria, sembra a prima vista contraddire la natura intrinseca della curvatura trattata da Gauss, intendendo con questa la proprietà della curvatura di una superficie di essere indipendente dallo spazio tridimensionale in cui essa giace.

L'illusione nasce nell'ambito empirico in cui opera il grande scienziato, ambito in cui l'astrazione geometrica si mischia alla tecnica sul campo, alla misura strumentale, alla natura materiale della nostra esistenza.

La stretta relazione tra l'esperienza e i calcoli, la rispondenza teorica alla operatività strumentale è sempre presente nella mente di Gauss come emerge in alcune lettere.

Gauss il 28 aprile 1817 scrive a Olbers : "Mi persuado sempre di più che la necessità della nostra geometria non possa essere dimostrata, non, per lo meno, dall'intelletto umano o per l'intelletto umano. Può darsi che in una diversa vita noi si giunga, sulla natura dello spazio, ad idee diverse, le quali ci sono per ora inattingibili. Ma fino ad allora è necessario porre la geometria non accanto all'aritmetica, la quale è puramente a priori, ma all'incirca sullo stesso piano della meccanica".

Ancora il 9 aprile 1830 scrive a Bessel: "Secondo la mia più profonda convinzione, la dottrina dello spazio occupa rispetto alla nostra conoscenza a priori un posto del tutto diverso da quello della teoria pura delle grandezze; infatti manca del tutto alla nostra conoscenza della prima quella completa convinzione della sua necessità (e quindi anche della sua assoluta verità), che è propria della seconda; dobbiamo umilmente riconoscere che mentre il numero è un puro prodotto del nostro spirito, lo spazio ha una realtà anche al di fuori del nostro spirito, e le sue leggi noi non le possiamo descrivere interamente a priori".

Per chiarire l'illusione di Gauss dobbiamo tener presente che la misurazione di una superficie, pur essendo questa estesa su due sole dimensioni, non si limita a queste, ma si estende inevitabilmente sulla terza.

L'osservatore è operatore, rilevatore delle misure ed è naturalmente tridimensionale.

La bidimensionalità pura, scissa dalle altre dimensioni, non esiste. Ma se esistesse impedirebbe di quantificare la curvatura di se stessa, perché l'osservatore bidimensionale non saprebbe nulla della realtà tridimensionale esterna alla propria realtà bidimensionale.

Se misurasse il raggio di una data circonferenza e verificasse il rapporto fra questi non saprebbe che  $2\pi$  corrisponde alla superficie di un piano e dunque non potrebbe valutare alcuna curvatura.

Analogamente, come ci insegna la teoria delle dimensioni, noi osservatori tridimensionali non sapremmo nulla, della realtà quadrimensionale esterna alla nostra realtà tridimensionale, se ci limitassimo alla realtà materiale del corpo che ci permette di muoverci solo nelle tre dimensioni in cui viviamo.

Dunque non si può parlare di curvatura intrinseca di una superficie come caratteristica conoscibile indipendentemente dallo spazio in cui essa giace.

Se però per curvatura intrinseca di Gauss, per estensione del concetto, si vuole intendere la curvatura misurabile da un osservatore tridimensionale appartenente alla superficie, come l'osservatore umano sulla superficie terrestre, allora il pensiero di Gauss vale ancora e non urta con la teoria delle dimensioni dello spazio.

In conclusione, per correttezza linguistica, le superfici, spazi a 2 dimensioni, non possiedono curvatura intrinseca, perché questa dipende dalla 3<sup>a</sup> dimensione.

Analogamente, può estendersi il concetto affermando che gli spazi ad n dimensioni non possiedono curvatura intrinseca, perché questa dipende dalla n+1<sup>esima</sup> dimensione.

## NOTE

- (1) *Giuseppe M. Catalano, Istituto Internazionale Studi Avanzati di Scienze della Rappresentazione dello Spazio, Palermo, 2008.*
- (2) *In un sistema di riferimento inerziale di coordinate cartesiane l'intervallo ds è definito dalla relazione*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

*Se si considera un sistema di riferimento non inerziale l'intervallo non si può più esprimere tramite quadrati dei differenziali delle quattro coordinate, ma tramite una forma quadratica generale dei differenziali delle coordinate (4)*

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

*con  $g_{ik}$  funzioni delle coordinate spaziali  $x^1, x^2, x^3$  e della coordinata temporale  $x^0$ .*

*Se ne trae che il sistema quadridimensionale di coordinate  $x^0, x^1, x^2, x^3$  deve essere curvilineo. Le grandezze  $g_{ik}$  definiscono le proprietà della geometria in ciascun sistema curvilineo, cioè la metrica dello spazio-tempo..*

*Secondo dunque la teoria della relatività generale le proprietà geometriche dello spazio-tempo sono determinate da fenomeni fisici. La metrica cioè non è proprietà invariabile dello spazio e del tempo.*

*Un mutamento della metrica dello spazio-tempo implica un mutamento della metrica propriamente spaziale. Se nella relatività ristretta si ha la geometria euclidea in uno spazio-tempo piano, nella relatività generale la geometria dello spazio è non euclidea in uno spazio-tempo curvo.*

- (3) *Giuseppe M. Catalano, le dimensioni dello spazio, Istituto Internazionale Studi Avanzati di Scienze della Rappresentazione dello Spazio, Palermo, 2008.*

*TEOREMA SULLA CURVATURA DELLO SPAZIO*

*Lo spazio non è rappresentabile con rette e piani, ma con circonferenze e sfere.*

*Sia  $r$  una generica retta,  $A$  e  $B$  due punti su di essa.  $A$  e  $B$  non hanno una distanza fissata assoluta. Per il principio di continuità, in assenza dell'osservatore, cioè in assoluto,  $A$  e  $B$  possono considerarsi a qualsiasi distanza. Immediata conseguenza è che in tale condizione*

*tutti i punti della retta possono considerarsi a due a due infinitamente vicini, tutti i punti della retta possono considerarsi a due a due infinitamente lontani.*

*Dunque i punti all'infinito della  $r$ , infinitamente lontani, possono considerarsi infinitamente vicini, il che è impossibile per definizione stessa di punto all'infinito se la retta è aperta, perché tali punti sono irraggiungibili. Se ne trae che la retta è chiusa. In tal caso infatti due punti infinitamente lontani possono sempre considerarsi infinitamente vicini. Essendo la  $r$  chiusa e la perpendicolare alla tangente in ogni suo punto asse di simmetria, s'identifica e dunque esiste la circonferenza  $r$  e non la retta. Estendendo dalla retta al piano, s'identifica e dunque esiste la sfera e non il piano.*

- (4) *Gravità e spazio-tempo, John A. Wheeler, Zanichelli, Bologna, 1993.*